Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2009.

Первый тур. Лига стратегий

1. Даны натуральные числа m и n. У Васи есть множество S всех прямоугольников с натуральными сторонами и площадями, равными степеням двойки. Также у него есть фигура R представляющая собой прямоугольник $2^m \times 2^n$ с вырезанным угловым квадратом 1×1. Из множества S Вася хочет выбрать $m+n$ прямоугольников, площади которых равны $2^0, 2^1, \ldots, 2^{m+n-1}$, и замостить ими фигуру R. Докажите, что он может это сделать не более, чем $(m+n)!$ способами.

2. Найдите все такие многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами, что для любого простого числа p и любых натуральных u и v, для которых $uv-1$ делится на p, число $f(u)f(v)-1$ также делится на p.

3. Точки A, B и C расположены вне окружности ω, причем ω пересекает стороны AC и BC и не пересекает сторону AB треугольника ABC. Через точки A, B и C проведены касательные AM, BN и CK к окружности ω. Докажите неравенство $AM\cdot BC+BN\cdot AC > CK\cdot AB$.

4. Окружность с центром O касается всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке K, а лучи AD и BC пересекаются в точке L. Точки X и Y, лежащие на отрезках OA и OC соответственно, таковы, что $2\angle XKY=\angle AKC$. Докажите, что $2\angle XLY=\angle ALC$.

5. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 2. При $n\geqslant 4$ докажите неравенство

$$\frac{x_1}{1+x_2^2}+\frac{x_2}{1+x_3^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

6. Существуют ли три равных девятиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие две стороны которых не совпадают?

7. Даны натуральные числа $n>m>1$. В полном n-вершинном ориентированном графе нет циклов из $m+1$ вершины. Докажите, что вершины этого графа можно так занумеровать числами от 1 до n, что при любых i и k, удовлетворяющих условию $i\geqslant k+m-1$, ребро направлено из i-ой вершины в k-ю.

8. Последовательность $\{x_n\}$ задается рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$$

Найдите наименьшее натуральное число x_1, для которого число x_{2006} кратно 2006.

9. Дана функция $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$. Положительные числа a, b, c, x_1, $x_2, \ldots, x_7$ удовлетворяют соотношениям

$$f(x_1,x_2,a)=f(x_2,x_3,b)=f(x_3,x_4,c)=f(x_4,x_5,a)=f(x_5,x_6,b)=f(x_6,x_7,c)=1.$$

Докажите, что $x_7=x_1$.

10. Найдите все функции $f(x)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству

$$f(f(f(x))+y)=f(f(y))+x$$

при x, $y\in\mathbb{R}$.